अध्याय 7

क्रमचय और संचय

7.1 समग्र अवलोकन (Overview)

क्रमचय और संचय का अध्ययन दी हुई वस्तुओं में से, बिना उनकी सूची बनाए, कुछ वस्तुएँ लेकर उन्हें व्यवस्थित करने और चुनने की विभिन्न विधियों या प्रकारों की संख्या निर्धारित करने से संबंधित होता है। कुछ मूलभूत गणन तकनीक हैं जो वस्तुओं को व्यवस्थित या चुनने के विभिन्न प्रकारों की संख्या निर्धारित करने में उपयोगी रहती हैं। दो मूलभूत गणन सिद्धांत नीचे दिये जा रहे हैं–

गणन के मूलभूत सिद्धांत

7.1.1 *गुणन सिद्धांत (गणन का मूलभूत सिद्धांत)*

मान लीजिए कि कोई घटना E के घटित होने के विभिन्न प्रकार m हैं तथा E के घटित होने के प्रत्येक प्रकार से जुड़े हुए (या संगत) एक अन्य घटना F के घटित होने के विभिन्न प्रकार n हैं। तब, एक दिये हुए क्रम में दोनों घटनाओं के घटित होने के कुल प्रकारों की संख्या $m \times n$ होती है।

7.1.2 *योग सिद्धांत*

यदि कोई घटना E के घटित होने के विभिन्न प्रकार m हैं तथा घटना F के घटित होने के विभिन्न प्रकार n हैं, तथा मान लीजिए कि ये दोनों घटनाएँ साथ-साथ घटित नहीं हो सकती हैं, तो E या F के घटित होने के कुल प्रकारों की संख्या $m + n$ होती है।

7.1.3 *क्रमचय :* क्रमचय वस्तुओं की एक निश्चित क्रम में व्यवस्थता होती है।

7.1.4 *विभिन्न वस्तुओं का क्रमचय :* n वस्तुओं में से सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर, उनके क्रमचयों की संख्या ^nP_n निम्नलिखित से प्राप्त होती है:

$$^nP_n = \underline{|n}, \qquad \dots (1)$$

जहाँ $\underline{|n} = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$ है, जिसे क्रमगुणित n या n क्रमगुणित पढ़ते हैं। इसे $n!$ भी लिखते हैं।

n वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर, उनके क्रमचयों की संख्या ^nP_r निम्नलिखित से प्राप्त होती है:

$$^nP_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

जहाँ $0 \le r \le n$ है। हम यह मान लेते हैं कि $\underline{|0} = 1$

7.1.5 *जब वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति है :* n वस्तुओं में से, सभी को एक साथ लेकर, क्रमचयों की संख्या, जब वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^n होती है। n वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर क्रमचयों की संख्या, जब वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^r होती है।

7.1.6 *क्रमचय जब वस्तुएँ भिन्न-भिन्न नहीं हैं :* n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या, जब p_1 वस्तुएँ एक प्रकार की हैं, p_2 वस्तुएँ दूसरे प्रकार की हैं,..., p_k वस्तुएँ kवें प्रकार की हैं तथा शेष यदि कोई हो तो विभिन्न प्रकारों की हैं, $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!...p_k!}$ होती है।

7.1.7 *संचय :* अनेक अवसरों पर, हमारी रुचि व्यवस्थित करने में न होकर केवल n वस्तुओं में से r वस्तुएँ चुनने में ही रहती है। एक संचय दी हुई वस्तुओं में से कुछ या सभी को चुनना होता है, जहाँ चुनने के क्रम का कोई महत्त्व नहीं होता है। n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने के विभिन्न प्रकारों की संख्या ^nC_r निम्नलिखित से दी जाती है:

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

टिप्पणियाँ

1. क्रमचय का प्रयोग कीजिए, यदि किसी समस्या में वस्तुओं को व्यवस्थित करने की संख्या ज्ञात करनी है तथा विभिन्न क्रमों को ध्यान में रखा जाना है।
2. संचय का प्रयोग कीजिए, यदि किसी समस्या में वस्तुओं को चुनने के प्रकारों की संख्या ज्ञात करनी है तथा चुनने के क्रम को ध्यान में नहीं रखना है।

7.1.8 कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम

मान लीजिए n और r धनात्मक पूर्णांक हैं, ताकि $r \le n$ है।

(i) $^nC_r = {^nC_{n-r}}$

(ii) $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$

(iii) $n\,{^{n-1}C_{r-1}} = (n - r + 1)\,{^nC_{r-1}}$

7.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 किसी कक्षा में 27 लड़के और 14 लड़कियाँ हैं। किसी कार्यक्रम के लिए, कक्षा का प्रतिनिधित्व करने के लिए शिक्षक को 1 लड़के और 1 लड़की का चुनाव करना चाहता है। शिक्षक यह चुनाव कितने प्रकार से कर सकता है?

हल यहाँ शिक्षक को दो संक्रियाएँ करनी हैं:

(i) 27 लड़कों में से 1 लड़का चुनना। (ii) 14 लड़कियों में से 1 लड़की चुनना।

इनमें से पहली 27 विधियों या प्रकारों से तथा दूसरी संक्रिया 14 प्रकारों से की जा सकती है। अतः, गणन के मूलभूत सिद्धांत द्वारा, विधियों या प्रकारों की कुल संख्या $= 27 \times 14 = 378$

उदाहरण 2

(i) 99 और 1000 के बीच ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जिनके इकाई के स्थान पर अंक 7 है?

(ii) 99 और 1000 के बीच ऐसी कितनी संख्याए हैं जिनमें कम से कम एक अंक 7 है?

हल

(i) सर्वप्रथम ध्यान दीजिए कि इन सभी संख्याओं में तीन अंक हैं। इकाई के स्थान पर 7 है। बीच वाला अंक 10 अंकों में से 0 से 9 कोई अंक हो सकता है। सौ के स्थान पर 9 अंकों में से 1 से 9 कोई भी अंक हो सकता है। अतः, गणन के मूलभूत सिद्धांत द्वारा 99 और 1000 के बीच $10 \times 9 = 90$ संख्याएँ होंगी जिनके इकाई के स्थान पर 7 होगा।

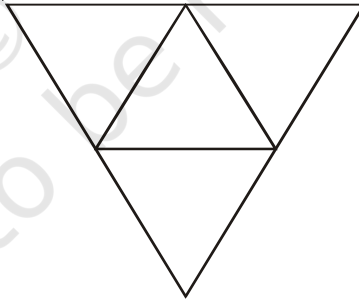
(ii) तीन अंकों की कुल संख्याएँ जिनमें कम से कम एक अंक 7 है = (तीन अंकों की कुल संख्याएँ) –(तीन अंकों की कुल संख्याएँ जिनमें 7 नहीं है)।

$= (9 \times 10 \times 10) - (8 \times 9 \times 9)$

$= 900 - 648 = 252$

उदाहरण 3 नीचे दिया हुआ आरेख निम्नलिखित दो प्रतिबंधों के अंतर्गत कितने प्रकार से रंगा जा सकता है?

(i) प्रत्येक छोटे त्रिभुज को तीन रंगों लाल, नीला या हरा में से किसी एक रंग से रंगा जाना है।

(ii) किन्हीं दो आसन्न क्षेत्रों में एक ही रंग न हो।

हल ये प्रतिबंध तभी संतुष्ट होते हैं जब हम ठीक इस प्रकार से करते हैं: पहले बीच वाले त्रिभुज को तीनों रंगों में से किसी एक रंग से रंग दीजिए। इसके बाद शेष तीन त्रिभुजों को शेष दो रंगों में से किसी एक रंग से रंग दीजिए।

गणन के मूलभूत सिद्धांत द्वारा, इसको रंगने के प्रकारों की कुल संख्या $= 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$

उदाहरण 4 5 बच्चों को एक पंक्ति में किस प्रकार व्यवस्थित किया जा सकता है, ताकि

(i) दो विशेष बच्चे सदैव साथ-साथ रहें? (ii) दो विशेष बच्चे साथ-साथ कभी न रहें

हल

(i) हम 2 विशेष बच्चों को एक मान कर व्यवस्थाओं पर विचार करते हैं और इसीलिए शेष 4 बच्चे $4! = 24$ प्रकार से व्यवस्थित किये जा सकते हैं। पुन:, ये दोनों विशेष बच्चे परस्पर दो प्रकारों से व्यवस्थित किये जा सकते हैं। अत:, व्यवस्थित करने के कुल प्रकार $24 \times 2 = 48$ हैं।

(ii) पाँच बच्चों के कुल $5! = 120$ क्रमचयों में से 48 में दो विशेष बच्चे सदैव साथ-साथ हैं। अत:, शेष $120 - 48 = 72$ क्रमचयों में ये दोनों विशेष बच्चे कभी भी साथ-साथ नहीं रहेंगे।

उदाहरण 5 यदि शब्द AGAIN के अक्षरों के सभी क्रमचयों को उसी क्रम में व्यवस्थित किया जाये, जैसे कि एक शब्दकोश में आते हैं, तो 49वाँ शब्द क्या है?

हल: अक्षर A से प्रारंभ करने पर, अन्य चार अक्षरों को व्यवस्थित करने के $4! = 24$ प्रकार हैं। ये प्रथम 24 शब्द होंगे। इसके बाद, G से प्रारंभ करते हुए, A, A, I और N को व्यवस्थित करने के प्रकार $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ हैं। ये अगले 12 शब्द हैं। इसके बाद 37वाँ शब्द I से प्रारंभ होगा। I से प्रारंभ करते हुए, यहाँ पुन: 12 शब्द हैं। इससे अब तक कुल 48 शब्द हो जाते हैं। अत:, 49वाँ शब्द NAAGI है।

उदाहरण 6 एक सेल्फ़ पर 3 गणित, 4 इतिहास, 3 रसायन और 2 जैविकी की पुस्तकें कितने प्रकारों से व्यवस्थित की जा सकती हैं यदि एक ही विषय की सभी पुस्तकें एक साथ रहें?

हल सर्वप्रथम हम एक ही विषय की पुस्तकों को एक इकाई मानते हैं। इस प्रकार, यहाँ 4 इकाइयाँ हैं, जिन्हें $4! = 24$ प्रकारों से व्यवस्थित किया जा सकता है। अब प्रत्येक व्यवस्था में, गणित की पुस्तकें $3!$ प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं, इतिहास की पुस्तकें $4!$ प्रकार से, रसायन की पुस्तकें $3!$ प्रकार से तथा जैविकी की पुस्तकें $2!$ प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं। अत:, व्यवस्थित करने के कुल प्रकारों की संख्या $= 4! \times 3! \times 4! \times 3! \times 2! = 41472$ है।

उदाहरण 7 किसी विद्यार्थी को 10 प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जबकि उसे प्रत्येक भाग A और B में से कम से कम 4 प्रश्न चुनने हैं। यदि भाग A में 6 प्रश्न हैं और भाग B में 7 प्रश्न हैं, तो वह विद्यार्थी कितने प्रकार से 10 प्रश्न चुन सकता है?

हल: संभावनाएँ इस प्रकार हैं:

भाग A में से 4 और भाग B में से 6

या भाग A में से 5 और भाग B में से 5

या भाग A में से 6 और भाग B में से 4

अत:, अभीष्ट प्रकारों की संख्या है:

$$^6C_4 \times {}^7C_6 + {}^6C_5 \times {}^7C_5 + {}^6C_6 \times {}^7C_4$$
$$= 105 + 126 + 35 = 266$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 8 मान लीजिए कि m पुरुष और n महिलाओं को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठाया जाना है कि कोई दो महिलाएँ साथ-साथ न रहें। यदि $m > n$ है, तो दर्शाइए कि उनको बैठाये जाने के प्रकारों की संख्या $\frac{m!(m+1)!}{(m-n+1)!}$ है।

हल मान लीजिए कि पुरुष (M) अपनी सीट पहले ले लेते हैं। उन्हें ${}^{m}P_{m}$ प्रकार से बैठाया जा सकता है, जैसा कि नीचे दी आकृति में दर्शाया गया है

□ M □ M □ ... □ M □
पहला दूसरा mवाँ

उपरोक्त आकृति से आप देख सकते हैं कि महिलाओं के लिए यहाँ $(m + 1)$ स्थान हैं। यह दिया है कि $m > n$ है और कोई दो महिलाएँ साथ-साथ नहीं बैठ सकती हैं। अतः n महिलाएँ अपनी सीट ${}^{(m+1)}P_{n}$ प्रकार से ले सकती हैं और इसीलिये बैठने के कुल प्रकारों की संख्या इस प्रकार हो जिसमें कोई दो महिलाएँ साथ-साथ न बैठें

$$({}^{m}P_{m}) \times ({}^{m+1}P_{n}) = \frac{m!(m+1)!}{(m-n+1)!}$$

उदाहरण 9 किसी सिनेमा हॉल में तीन दंपत्ती-युग्मों को एक पंक्ति में बैठाना है जिसमें 6 सीटें है। यदि युग्मों को एक दूसरे से अलग बैठना है, तो उन्हें कितने प्रकार से बैठाया जा सकता है? उनके बैठने के प्रकारों की संख्या उस स्थिति के लिए भी ज्ञात कीजिए, जब सभी महिलाएँ एक साथ बैठती हैं।

हल आइए दंपत्ती-युग्मों को S_1, S_2 और S_3 से व्यक्त करें, जहाँ प्रत्येक युग्म को एक एकल इकाई माना गया है, जैसा कि नीचे आकृति में दर्शाया गया है:

□□ □□ □□
पहला दूसरा तीसरा

तब युग्मों के बैठने के प्रकारों की संख्या ताकि वे एक दूसरे से अलग बैठें = 3! = 6

पुनः प्रत्येक युग्म परस्पर 2! प्रकारों से बैठ सकता है। अतः, बैठने के कुल प्रकारों की संख्या ताकि युग्म एक-दूसरे से अलग बैठें $= 3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$

पुनः, यदि तीनों महिलाएँ एक साथ बैठती हैं, तो आवश्यक है कि तीनों पुरुषों को एक साथ बैठना होगा। साथ ही, पुरुष और महिलाएँ परस्पर 2! प्रकारों से बैठ सकते हैं। अतः, उन प्रकारों की संख्या जब सभी महिलाएँ एक साथ बैठती हैं $= 3! \times 3! \times 2! = 72$

उदाहरण 10 एक छोटे गाँव में, कुल 87 परिवार हैं जिनमें से 52 परिवारों में अधिकतम 2 बच्चे हैं। एक ग्रामीण विकास योजना में, सहायता के लिए 20 परिवारों का चयन किया जाना है, जिनमें से कम

से कम 18 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले होने चाहिए। यह विकल्प कितने प्रकारों से किया जा सकता है?

हल यह दिया है कि 87 परिवारों में से 52 परिवार ऐसे हैं जिनमें अधिकतम 2 बच्चे हैं। अत:, शेष 35 परिवार अन्य प्रकार के हैं। प्रश्नानुसार, ग्रामीण विकास योजना के अंतर्गत 20 परिवार सहायता के लिए चुने जाने हैं, जिनमें कम से कम 18 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले होने चाहिए। अत:,संभावित विकल्पों की संख्या निम्नलिखित है:

$^{52}C_{18} \times {}^{35}C_2$ (18 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले और 2 अन्य प्रकार के परिवार)

$^{52}C_{19} \times {}^{35}C_1$ (19 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले और 1 अन्य प्रकार का परिवार)

$^{52}C_{20}$ (सभी 20 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले)

अत:, संभव विकल्पों की कुल संख्या है

$^{52}C_{18} \times {}^{35}C_2 + {}^{52}C_{19} \times {}^{35}C_1 + {}^{52}C_{20}$

उदाहरण 11 एक लड़के के पास 3 लाइब्रेरी टिकट हैं तथा लाइब्रेरी में उसकी रुचि की 8 पुस्तकें हैं। इन 8 में से वह गणित भाग II तब तक नहीं लेना चाहता जब तक कि गणित भाग–I भी न ले ली जाए। वह लाइब्रेरी से तीन पुस्तकें कितने प्रकार से ले सकता है?

हल आइए निम्नलिखित स्थितियों को लें:

स्थिति (i) वह लड़का गणित भाग–II लेता है। तब, वह गणित भाग–I भी लेगा। अत:, संभव विकल्पों की संख्या $^6C_1 = 6$ है।

स्थिति (ii) वह लड़का गणित भाग–II नहीं लेता है। तब संभव विकल्पों की संख्या $^7C_3 = 35$

अत:, विकल्पों की कुल संख्या $35 + 6 = 41$ है।

उदाहरण 12 n विभिन्न वस्तुओं में r वस्तुएँ एक साथ लेकर क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे दो विशेष वस्तुएँ एक साथ रहें।

हल दो विशेष वस्तुओं वाले एक बंडल को r स्थानों पर $(r – 1)$ विधियों से रखा जा सकता है (क्यों?) तथा बंडल की दोनों वस्तुएँ स्वयं $\underline{|2}$ प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं। अब $(n – 2)$ वस्तुएँ $(r – 2)$ स्थानों पर $^{n-2}P_{r-2}$, प्रकारों से व्यवस्थित की जाएंगी।

इस प्रकार, गणन के मूलभूत सिद्धांत के प्रयोग द्वारा, क्रमचयों की वांछित संख्या= $\underline{|2} \cdot (r-1) \cdot {}^{n-2}P_{r-2}$ होगी।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

नीचे दिये हुए उदाहरणों में, उनके सम्मुख दिये चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)

उदाहरण 13 A और B के बीच चार बस मार्ग हैं तथा B और C के बीच तीन बस मार्ग हैं। एक व्यक्ति B से होकर A से C तक जाने में बस द्वारा राउंड यात्रा (round trip), अर्थात् आने-जाने की यात्रा कर सकता है। यदि वह एक बस मार्ग का एक से अधिक बार प्रयोग नहीं करना चाहता है, तो वह आने-जाने की यात्रा कितनी विधियों से कर सकता है?

(A) 72 (B) 144 (C) 14 (D) 19

हल (A) सही उत्तर है। नीचे दी आकृति में, A से B तक

4 बस मार्ग हैं और B से C तक 3 मार्ग हैं। अत:, A से C तक जाने के लिए, $4 \times 3 = 12$ प्रकार या विधियाँ हैं। यह आने-जाने की यात्रा है, इसलिए वह व्यक्ति C से A, B से होकर वापस भी जाएगा। यह प्रतिबंध है कि वह C से B और फिर B से A उसी बस मार्ग से यात्रा नहीं कर सकता जिससे वह गया था, अर्थात् वह उसका एक से अधिक बार प्रयोग नहीं कर सकता। अत:, वापसी यात्रा के लिए, $2 \times 3 = 6$ विधियाँ हैं। अत:, वांछित विधियों की कुल संख्या $= 12 \times 6 = 72$.

उदाहरण 14 7 पुरुष और 5 महिलाओं में से 3 पुरुष और 2 महिलाओं वाली एक कमेटी निम्नलिखित में से कितने प्रकार से बनायी जा सकती हैं?

(A) 45 (B) 350 (C) 4200 (D) 230

हल (B) सही उत्तर है। 7 पुरुषों में से 3 पुरुष ${}^7C_3$ प्रकार से चुने जा सकते हैं तथा 5 महिलाओं में से 2 महिलाएँ ${}^5C_2$ प्रकार से चुनी जा सकती हैं। अत:, कमेटी चुनने के प्रकारों की संख्या

$${}^7C_3 \times {}^5C_2 = 350 \text{ है।}$$

उदाहरण 15 शब्द 'EAMCOT' के सभी अक्षरों को विभिन्न संभव प्रकारों से व्यवस्थित किया जाता है। ऐसी व्यवस्थाओं के कुल प्रकारों, जिनमें कोई भी दो स्वर साथ-साथ नहीं होंगे, की संख्या है

(A) 360 (B) 144 (C) 72 (D) 54

हल (B) सही उत्तर है। हम जानते हैं कि यहाँ 3 व्यंजन हैं और 3 स्वर E, A और O हैं। क्योंकि किन्हीं भी दो स्वरों को एक साथ नहीं रहना है, अत: इनके स्थान 'X' से अंकित किये गये हैं: X M X C X T X ये स्वर ${}^4P_3$ प्रकार से व्यवस्थित किये जा सकते हैं तथा 3 व्यंजन $\underline{|3}$ प्रकार से व्यवस्थित किए जा सकते हैं। अत:, प्रकारों की वांछित संख्या $= 3! \times {}^4P_3 = 144$.

उदाहरण 16 वर्णमाला के 10 विभिन्न अक्षर दिये हुए हैं। इन दिये हुए अक्षरों से 5 अक्षरों वाले शब्द बनाये जाते हैं तब उन शब्दों की संख्या, जिनमें कम से कम एक अक्षर की पुनरावृत्ति होगी।

(A) 69760 (B) 30240 (C) 99748 (D) 99784

हल (A) सही विकल्प है। 5 अक्षरों वाले शब्दों की संख्या (जबकि एक अक्षर की पुनरावृत्ति हो सकती है) $= 10^5$। पुन:, 5 भिन्न-भिन्न अक्षरों वाले शब्दों की संख्या $= {}^{10}P_5$ अत:, वाँछित शब्दों की संख्या

= कुल शब्द – उन शब्दों की संख्या जिनमें किसी अक्षर की पुनरावृत्ति न हो

$= 10^5 - {}^{10}P_5 = 69760$

उदाहरण 17 विभिन्न रंगों के 6 झंडों में से एक या अधिक झंडों का प्रयोग करते हुए, दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या है–

(A) 63 (B) 1956 (C) 720 (D) 21

हल सही उत्तर B है।

एक झंडे के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_1 = 6$

दो झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_2 = 30$

तीन झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_3 = 120$

चार झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_4 = 360$

पाँच झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_5 = 720$

छ: झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_6 = 720$

अत:, एक समय पर एक या अधिक झंडों का प्रयोग करते हुए दिये जा सकने वाले संकेतों की कुल संख्या

$6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$ (योग सिद्धांत के प्रयोग से)

उदाहरण 18 किसी परीक्षा में, तीन बहु-विकल्पीय प्रश्न हैं तथा ऐसे प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प हैं। उन विधियों की संख्या, जिनसे कोई विद्यार्थी सभी उत्तर सही करने में असफल रहेगा, है:

(A) 11 (B) 12 (C) 27 (D) 63

हल सही विकल्प (D) है। यहाँ तीन बहु विकल्पीय प्रश्न हैं, जिनमें से प्रत्येक में चार संभव उत्तर हैं। अत:, संभव उत्तरों की कुल संख्या $= 4 \times 4 \times 4 = 64$ इन संभव उत्तरों में से केवल एक ही प्रकार के सभी उत्तर सही हो सकते हैं। अत:, उन विधियों की संख्या, जिनमें कोई विद्यार्थी सभी उत्तर सही देने में असफल रहेगा $= 64 - 1 = 63$

उदाहरण 19 सरल रेखाएँ l_1, l_2 और l_3 एक ही तल में हैं और समांतर हैं। l_1 पर कुल m बिंदु, l_2 पर कुल n बिंदु और l_3 पर कुल k बिंदु लिये जाते हैं। इन बिंदुओं को शीर्ष लेते हुए बनाये जा सकने वाले त्रिभुजों की अधिकतम संख्या है–

(A) ${}^{(m+n+k)}C_3$ (B) ${}^{(m+n+k)}C_3 - {}^mC_3 - {}^nC_3 - {}^kC_3$

(C) ${}^mC_3 + {}^nC_3 + {}^kC_3$ (D) ${}^mC_3 \times {}^nC_3 \times {}^kC_3$

हल (B) सही उत्तर है। यहाँ कुल $(m + n + k)$ बिंदु हैं, जिन्हें ${}^{(m+n+k)}C_3$ त्रिभुज देने चाहिए। परंतु l_1 पर स्थित m बिंदुओं में से 3 बिंदु एक साथ लेने पर, ${}^mC_3$ संचय बनेंगे, जिनसे कोई त्रिभुज प्राप्त नहीं होगा। इसी प्रकार ${}^nC_3$ और ${}^kC_3$ त्रिभुज भी प्राप्त नहीं होंगे। अत:, त्रिभुजों की वांछित संख्या $= {}^{(m+n+k)}C_3 - {}^mC_3 - {}^nC_3 - {}^kC_3$

7.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. आठ कुर्सियों को संख्या 1 से 8 तक अंकित किया गया है। दो महिलाएँ और 3 पुरुष इनमें से एक-एक कुर्सी पर बैठना चाहते हैं। पहले महिलाएँ 1 से 4 अंकित कुर्सियों पर बैठने का चयन करती है तथा बाद में पुरुष शेष कुर्सियों पर बैठने का चयन करते हैं। संभव व्यवस्थाओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।
[**संकेत:** 1 से 4 तक अंकित कुर्सियों पर 2 महिलाएँ $^4P_2$ प्रकार से बैठ सकती है। 3 पुरुष शेष कुर्सियों पर $^6P_3$ प्रकार से बैठ सकते हैं।]

2. यदि शब्द RACHIT के अक्षरों को सभी ऐसे संभव प्रकारों से व्यवस्थित किया जाता है, जैसे वे शब्दकोश में लिखे होते हैं, तब इस व्यवस्था में RACHIT कौन से स्थान पर रहेगा?
[संकेत: प्रत्येक स्थिति में A, C, H, और I से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या 5! है।]

3. एक प्रत्याशी को 12 प्रश्नों में से 7 प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जो दो समूहों में हैं प्रत्येक समूह में 6 प्रश्न हैं। वह किसी भी समूह में से 5 प्रश्नों से अधिक प्रश्न नहीं कर सकता है। प्रश्नों को करने के विभिन्न प्रकारों की संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक तल में दिये 18 बिंदुओं में से, केवल पाँच बिंदुओं को छोड़कर जो संरेख है, कोई भी तीन बिंदु एक ही रेखा में नहीं हैं। इन बिंदुओं को मिलाने से बनने वाली रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
[**संकेत:** सरल संख्याओं की संख्या = $^{18}C_2 - {}^5C_2 + 1$]

5. हम 8 व्यक्तियों में से 6 व्यक्ति चुनना चाहते हैं, परंतु यदि व्यक्ति A चुना जाता है, तो व्यक्ति B भी चुना जाना चाहिए। यह चयन कितनी विधियों से किया जा सकता है?

6. 12 व्यक्तियों में से 5 व्यक्तियों की कमेटी एक अध्यक्ष के साथ कितने प्रकार से चुनी जा सकती है?
[**संकेत:** अध्यक्ष 12 प्रकार से चुना जा सकता है तथा शेष को $^{11}C_4$ प्रकार से चुना जा सकता है।]

7. कितनी ऑटोमोबाइल लाइसेंस प्लेटें बनायीं जा सकती हैं, यदि प्रत्येक प्लेट में दो भिन्न अक्षर हैं और उनके बाद तीन भिन्न-भिन्न अंक आते हैं?

8. एक थैले में 5 काली और 6 लाल गेंदें हैं। इस थैले में 2 काली और 3 लाल गेंदें निकालने की विभिन्न विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. n भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिनमें 3 विशेष वस्तुएँ एक साथ रहनी चाहिएं।

10. शब्द 'TRIANGLE' के अक्षरों से कुल बनाये जा सकने वाले शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए, ताकि कोई भी स्वर एक साथ न रहे।

11. 6000 से बड़े और 7000 से छोटे उन धनात्मक पूर्णांकों की संख्या ज्ञात कीजिए, जो 5 से विभाज्य हैं, जबकि किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो।

12. 10 व्यक्तियों के नाम $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{10}$ हैं। इन 10 व्यक्तियों में से 5 व्यक्तियों को एक पंक्ति में व्यवस्थित करना है, ताकि प्रत्येक व्यवस्था में P_1 रहे तथा P_4 और P_5 न रहें। ऐसी सभी संभव व्यवस्थाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** व्यवस्थाओं की वाँछित संख्या = ${}^7C_4 \times 5!$]

13. एक हॉल में 10 लैम्प हैं। इनमें से प्रत्येक को स्वतंत्र रूप से 'स्विच ऑन' किया जा सकता है। उन विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनसे उस हॉल को प्रकाशित किया जा सकता है।

[**संकेत:** वाँछित संख्या = $2^{10} - 1$]

14. एक बॉक्स में, दो सफेद, तीन काली और चार लाल गेंदें हैं। इस बॉक्स में से तीन गेंद कितने प्रकार से निकाली जा सकती हैं, यदि इनमें कम से कम 1 काली गेंद अवश्य हो।

[**संकेत:** प्रकारों की वाँछित संख्या = ${}^3C_1 \times {}^6C_2 + {}^3C_2 \times {}^6C_2 + {}^3C_3$]

15. यदि ${}^nC_{r-1} = 36$, ${}^nC_r = 84$ और ${}^nC_{r+1} = 126$, तो ${}^rC_2$ ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** वाँछित संख्या $\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}}$ और $\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}$ का प्रयोग करते हुए, r का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण बनाइए।]

16. अंक 3, 5, 7, 8 और 9 से बनाये जा सकने वाले 7000 से बड़े पूर्णांकों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो।

[**संकेत:** 7000 से बड़े चार अंकों के अतिरिक्त, पाँच अंकों से बने सभी पूर्णांक 7000 से बड़े होंगे।]

17. यदि एक तल में 20 रेखाएँ ऐसी खींची जाएँ कि इनमें से कोई दो समांतर न हों और कोई भी तीन संगामी न हों, तो वे परस्पर कितने बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेंगी?

18. किसी शहर में, सभी टेलीफोन नंबर 6 अंकों के हैं; जिनमें प्रथम दो अंक 41 या 42 या 46 या 62 हैं तो कितने टेलीफोन नम्बरों में सभी 6 अंक भिन्न-भिन्न हैं?

19. एक परीक्षा में, एक विद्यार्थी को 5 प्रश्नों में से 4 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। परंतु प्रश्न 1 और 2 अनिवार्य है। उन विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनसे वह विद्यार्थी उत्तर देने के विकल्प चुन सकता है।

20. एक उत्तल बहुभुज के 44 विकर्ण हैं। उसकी भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** *n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या* (${}^nC_2 - n$) *होती है।*]

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

21. 18 चूहों को दो प्रायोगिक समूहों और एक नियंत्रण समूह में रखा जाता है, जबकि सभी समूह समान रूप से विशाल हैं। ये चूहे इन समूहों में कितने प्रकार से रखे जा सकते हैं?

22. एक थैले में 6 सफेद कंचे और 5 लाल कंचे हैं। इस थैले में से चार कंचे निकालने की कुल विधियाँ ज्ञात कीजिए, यदि (a) वे किसी भी रंग के हों, (b) दो सफेद और दो लाल रंग के हों तथा (c) ये सभी एक ही रंग के हों।

23. 16 खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों की कितनी फुटबॉल टीमें चुनी जा सकती हैं? इनमें से कितनी टीमों में,

(i) 2 विशेष खिलाड़ी सम्मिलित होंगे?

(ii) 2 विशेष खिलाड़ी टीम से बाहर होंगे?

24. 11 विद्यार्थियों वाली एक खेल-कूद टीम बनायी जानी है, जिसमें कक्षा XI से कम से कम 5 और कक्षा XII से कम से कम 5 विद्यार्थी लिये जाने चाहिए। यदि इन कक्षाओं में से प्रत्येक में 20 विद्यार्थी हैं, तो यह टीम कितने प्रकार से बनायी जा सकती है?

25. किसी समूह में 4 लड़के और 7 लड़कियाँ हैं। इनसे 5 सदस्यों वाली एक टीम किस प्रकार बनाई जा सकती है, यदि टीम में

(i) कोई लड़की नहीं है?

(ii) कम से कम एक लड़का और एक लड़की है?

(iii) कम से कम तीन लड़कियाँ हैं?

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 26 से 40 में, दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q)

26. यदि ${}^nC_{12} = {}^nC_8$ तो n बराबर है

(A) 20 (B) 12 (C) 6 (D) 30

27. यदि एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है तो संभव परिणामों की संख्या है

(A) 36 (B) 64 (C) 12 (D) 32

28. अंक 2, 3, 4 और 7 को केवल एक बार प्रयोग करते हुए इनसे चार अंकों की बनायी जा सकने वाली विभिन्न संख्याओं की कुल संख्या है

(A) 120 (B) 96 (C) 24 (D) 100

29. अंक 3, 4, 5 और 6 को एक साथ लेकर उनकी सहायता से बनायी जा सकने वाली सभी संख्याओं के इकाई के स्थान के अंकों का योग है

(A) 432 (B) 108 (C) 36 (D) 18

30. 4 स्वर और 5 व्यंजनों में से 2 स्वर और 3 व्यंजन लेकर बनाये जा सकने वाले शब्दों की कुल संख्या बराबर है

(A) 60 (B) 120 (C) 7200 (D) 720

31. अंक 0, 1, 2, 3, 4 और 5 का बिना पुनरावृत्ति के प्रयोग करने पर, 3 से विभाज्य पाँच अंकों की संख्या बनायी जाती है। ऐसा करने के प्रकारों की कुल संख्या है

(A) 216 (B) 600 (C) 240 (D) 3125

[**संकेत:** *पाँच अंकों की संख्याएँ अंक* 0,1, 2, 4, 5 *या अंक,* 1, 2, 3, 4, 5 *का प्रयोग करके बनायी जा सकती है, क्योंकि इन स्थितियों में अकों का योग* 3 *से विभाज्य है।*]

32. एक कमरे में प्रत्येक व्यक्ति प्रत्येक अन्य व्यक्ति से हाथ मिलाता है। कुल 66 हाथ मिलाये गये हैं। इस कमरे में व्यक्तियों की संख्या है

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14

33. 12 बिंदुओं के एक समुच्चय के बिंदुओं को शीर्ष मानते हुए, जिनमें से 7 बिंदु एक ही रेखा में हैं, बनाये जा सकने वाले त्रिभुजाओं की संख्या है

(A) 105 (B) 15 (C) 175 (D) 185

34. चार समांतर रेखाओं वाले एक समुच्चय की रेखाओं द्वारा तीन समांतर रेखाओं वाले एक समुच्चय की रेखाओं को प्रतिच्छेद करने पर बन सकने वाले समांतर चतुर्भुजों की संख्या है

(A) 6 (B) 18 (C) 12 (D) 9

35. 22 खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों की टीम बनाने की संख्या, जब उनमें से 2 को सदैव सम्मिलित किया जाए और 4 को सदैव छोड़ दिया जाए, बराबर है

(A) $^{16}C_{11}$ (B) $^{16}C_{5}$ (C) $^{16}C_{9}$ (D) $^{20}C_{9}$

36. कम से कम एक अंक की पुनरावृत्ति वाले 5 अंक के टेलीफोन नंबरों की संख्या है

(A) 90,000 (B) 10,000 (C) 30,240 (D) 69,760

37. चार पुरुष और छः महिलाओं में से एक कमेटी इस प्रकार चुननी है कि उसमें कम से कम दो पुरुष हों तथा उनसे दोगुनी महिलाएँ हों। कमेटी को चुनने के प्रकारों की संख्या है

(A) 94 (B) 126 (C) 128 (D) कोई नहीं

38. 9 अंकों वाली ऐसी संख्यांक जिनके सभी अंक भिन्न हों, हैं:

(A) 10! (B) 9 ! (C) $9 \times 9!$ (D) $10\times10!$

39. शब्द ARTICLE के सभी अक्षरों से बनाए जा सकने वाले शब्दों की संख्या जिसमें, स्वर सम स्थानों पर रहे, है:

(A) 1440 (B) 144

(C) 7! (D) $^{4}C_{4} \times {}^{3}C_{3}$

40. पाँच विभिन्न हरे रोगन, चार विभिन्न नीले रोगन तथा तीन विभिन्न लाल रोगन के दिये रहने पर, कम से कम एक हरे रोगन और एक नीले रोगन को लेते हुए, चयन किये जा सकने वाले रोगनों के संचयों की संख्या है

(A) 3600 (B) 3720 (C) 3800 (D) 3600

[**संकेत:** 5 हरे रोगन, 4 नीले रोगन और तीन लाल रोगनों का चयन करने अथवा चयन न करने के प्रकारों की संख्याएँ क्रमशः 2^5, 2^4 और 2^3 है।]

प्रश्न 41 से 50 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

41. यदि $^{n}P_{r} = 840$ और $^{n}C_{r} = 35$, तो $r =$ ——— है।

42. $^{15}C_{8} + {}^{15}C_{9} - {}^{15}C_{6} - {}^{15}C_{7} =$ ——— है।

43. n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर, पुनरावृत्ति की अनुमति के साथ, क्रमचयों की संख्या ——— है।

44. शब्द INTERMEDIATE के अक्षरों से बनाये जा सकने वाले विभिन्न शब्दों की संख्या ——— है, जबकि दो स्वर कभी एक साथ नहीं आते हैं।

[**संकेत:** 6 व्यंजन, जिनमें दो एक जैसे हैं, को व्यवस्थित करने के प्रकारों की संख्या $\frac{6!}{2!}$ है तथा स्वरों को व्यवस्थित करने के प्रकारों की संख्या $= {}^7P_6 \times \frac{1}{3!} \times \frac{1}{2!}$]

45. एक थैले में से, जिसमें 5 लाल, 4 सफेद और 3 काली गेंदें हैं, तीन गेंदें निकाली जाती हैं। उन विधियों की संख्या जिनमें ऐसा किया जा सकता है, जिसमें कम से कम 2 लाल गेंद हों, ——— है।

46. ऐसी 6 अंकों की संख्याओं की संख्या, जिनमें सभी अंक विषम हैं, ——— है।

47. एक फुटबॉल चैम्पियनशिप प्रतियोगिता में 153 मैच खेले गये। प्रत्येक दो टीमों ने एक दूसरे के साथ एक-एक मैच खेला। इस प्रतियोगिता में प्रतिभागी टीमों की संख्या ——— है।

48. छः '+' और चार '–' चिन्हों को एक पंक्ति में इस प्रकार व्यवस्थित करने की संख्या कि कोई दो '–' चिन्ह एक साथ न रहें ——— है।

49. 10 पुरुष और 7 महिलाओं में से 6 व्यक्तियों की एक कमेटी ऐसी बनायी जानी है कि उसमें कम से कम 3 पुरुष और 2 महिलाएँ रहें। कितने प्रकारों से ऐसा किया जा सकता है, यदि दो विशेष महिलाओं ने एक ही कमेटी में रहने के लिए मना कर दिया है की संख्या ——— है।

[**संकेत** कम से कम 3 पुरुष और 2 महिलाएँ: तरीकों की कुल संख्या $= {}^{10}C_3 \times {}^7C_3 + {}^{10}C_4 \times {}^7C_2$। दो विशेष महिलाएँ सदैव साथ रहें, तब तरीकों की संख्या $= {}^{10}C_4 + {}^{10}C_3 \times {}^5C_1$ कमेटियों की कुल संख्या, जब दो विशेष महिलाएँ कभी एक साथ न रहें = कुल संख्या–साथ वाली संख्या]

50. एक बॉक्स में 2 सफेद गेंदें, 3 काली गेंद और 4 लाल गेंद हैं। यदि कम से कम एक गेंद काली निकालनी है, तो इस बॉक्स में से तीन गेंद निकालने के प्रकारों की संख्या ——— है।

बताइए कि प्रश्न 51 से 59 तक दिए हुए कथनों में से कौन सा कथन सत्य है और कौन सा असत्य है? अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

51. एक तल में 12 बिंदु है। जिनमें से 5 बिंदु संरेख हैं। तब, इन बिंदुओं को युग्मों में जोड़ने पर प्राप्त रेखाओं की संख्या ${}^{12}C_2 - {}^5C_2$ है।

52. 5 लेटर बॉक्स में 3 पत्र 3^5 तरीके से डाले जा सकते हैं।

53. n वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर उन क्रमचयों की संख्या, जिनमें m विशेष वस्तुएँ एक साथ रहें, ${}^{n-m}P_{r-m} \times {}^rP_m$ है।

54. एक स्टीमर में 12 पशुओं के लिए अस्तबल है यहाँ घोड़े, गाय और बछड़े (प्रत्येक 12 से कम नहीं) स्टीमर में चढ़ाने के लिए तैयार हैं। उन्हें 3^{12} प्रकारों से चढ़ाया जा सकता है।

55. यदि n वस्तुओं में से कुछ या सभी एक साथ लिये जाएँ, तो संचयों की संख्या 2^n-1 है।

56. एक थैले में 4 लाल और 5 काली गेंदें दिए रहने पर, उसमें से कम से कम एक लाल गेंद चुनने के केवल 24 प्रकार होंगे। यह दिया हुआ है कि एक ही रंग की गेंदें एक जैसी (सर्वसम) हैं।

57. एक लंबी मेज के दोनों ओर 18 मेहमानों को इस प्रकार बैठाया जाना है कि प्रत्येक ओर आधे मेहमान रहें। चार विशिष्ट मेहमान एक विशेष ओर बैठना चाहते हैं तथा तीन अन्य मेज के दूसरी ओर बैठना चाहते हैं। उन प्रकारों की संख्या जिनमें बैठने की व्यवस्था की जा सकती है, $\frac{11!}{5!6!}(9!)(9!)$ है।

[**संकेत:** 4 को एक ओर और 3 को दूसरी ओर बैठाने पर, हमें 11 चुनने हैं; 5 एक ओर तथा 6 दूसरी ओर। अब लंबी मेज के प्रत्येक ओर 9 मेहमान हो जाते हैं, जो 9! प्रकारों से व्यवस्थित किये जा सकते हैं।

58. एक परीक्षार्थी को 12 प्रश्नों में से 7 प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जो ऐसे दो समूहों में विभाजित हैं, जिनमें से प्रत्येक में 6 प्रश्न हैं। उसे किसी भी समूह में से 5 प्रश्नों से अधिक के उत्तर देने की अनुमति नहीं है। वह इन 7 प्रश्नों को 650 प्रकारों से चुन सकता है।

59. 12 रिक्त पदों को भरने के लिए 25 प्रत्याशी हैं। जिनमें से 5 अनुसूचित जाति के प्रत्याशियों के लिए आरक्षित हैं, जबकि शेष सभी के लिए खुले हैं। उन विधियों की संख्या जिनसे चयन किया जा सकता है ${}^5C_3 \times {}^{20}C_9$ है।

प्रश्न 60 से 64 तक प्रत्येक में, स्तंभ C_1 के प्रत्येक प्रश्न को स्तंभ C_2 में दिए उत्तरों से मिलान कीजिए।

60. गणित की 3 पुस्तक, भौतिकी की 4 तथा अंग्रेजी की 5 पुस्तकें हैं। कितने विभिन्न संग्रह बनाये जा सकते हैं, जिसमें प्रत्येक संग्रह में हैं:

C_1	C_2
(a) प्रत्येक विषय की एक पुस्तक	(i) 3968
(b) प्रत्येक विषय की कम से कम एक पुस्तक	(ii) 60
(c) अंग्रेजी की कम से कम एक पुस्तक	(iii) 3255

61. पाँच लड़के और पाँच लड़कियाँ एक पंक्ति में बैठते हैं। निम्नलिखित प्रतिबंधों के अंतर्गत बैठने की व्यवस्था करने की संख्या ज्ञात कीजिए:

C_1	C_2
(a) लड़के और लड़कियाँ बारी बारी से	(i) $5! \times 6!$
(b) कोई दो लड़कियाँ एक साथ न बैठें	(ii) $10! - 5!6!$
(c) सभी लड़कियाँ एक साथ बैठें	(iii) $(5!)^2 + (5!)^2$
(d) सभी लड़कियाँ कभी भी एक साथ न बैठें	(iv) $2!5!5!$

62. 10 आचार्य और 20 प्रवक्ता में से 2 आचार्य और 3 प्रवक्ता वाली कमेटी बनायी जानी है। ज्ञात कीजिए।

C_1	C_2
(a) कमेटी कितने प्रकार से बन सकती है	(i) $^{10}C_2 \times {}^{19}C_3$
(b) कितने प्रकार से एक विशेष आचार्य सम्मिलित होगा	(ii) $^{10}C_2 \times {}^{19}C_2$
(c) कितने प्रकार से एक विशेष प्रवक्ता सम्मिलित होगा	(iii) $^{9}C_1 \times {}^{20}C_3$
(d) कितने प्रकार से एक विशेष प्रवक्ता सम्मिलित नहीं किया जाएगा	(iv) $^{10}C_2 \times {}^{20}C_3$

63. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 और 7 का प्रयोग करके 4 विभिन्न अंकों की एक संख्या बनायी जाती है। ज्ञात कीजिए:

C_1	C_2
(a) कितनी संख्याएँ बनती है?	(i) 840
(b) कितनी संख्या ठीक 2 से विभाज्य हैं?	(ii) 200
(c) कितनी संख्याएँ ठीक 25 से विभाज्य हैं?	(iii) 360
(d) इनमें से कितनी संख्याएँ 4 से विभाज्य हैं?	(iv) 40

64. शब्द MONDAY के अक्षरों से कितने (शब्दकोश के अर्थ या बिना अर्थ के) शब्द बनाये जा सकते हैं। यह कल्पना करते हुए कि किसी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं होगी, यदि

C_1	C_2
(a) एक समय पर 4 अक्षर प्रयोग किये जाते हैं	(i) 720
(b) एक समय पर सभी अक्षर प्रयोग किए जाते हैं	(ii) 240
(c) सभी अक्षर प्रयोग किए जाते हैं, परंतु पहला अक्षर एक स्वर है	(iii) 360